1) Je dán lineární prostor $P_{\leq 2}$ všech polynomů stupně nejvýš 2 a polynomy: $p_1(x) = 2x^2+3x$, $p_2(x) = x^2-x+2$, $p_3(x) = 4x^2+x+4$, $p_4(x) = x^2-6x+6$, $p_5(x) = 3x^2+2x+1$). Ze zadaných polynomů vyberte alespoň jednu skupinu, která tvoří bázi prostoru $P_{\leq 2}$.

2) Je dán lineární prostor $\mathbf{R}^3$ s operací sčítání vektorů a násobení vektoru reálným číslem po složkách. Zjistěte, zda následující podmnožiny $M \subseteq \mathbf{R}^3$ jsou podprostory lineárního prostoru $\mathbf{R}^3$. Své tvrzení zdůvodněte.
   a) $M = \{(a, a, c);\ a > c,\ c \text{ libovolné}\}$
   b) $M = \{(a, 0, 2a);\ a \text{ libovolné}\}$
   c) $M = \{(a, b, c);\ a + b + c = 0,\ a,\ b \text{ libovolné}\}$
   d) $M = \{(a, c - 2, c);\ a,\ c \text{ libovolné}\}$

3) Je dána matice
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$
   Určete $\det\mathbf{A}$ a $\det\mathbf{A}^{-1}$.

4) Určete lokální extrémy funkce $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + 6x^2}$.

5) Pomocí Taylorova polynomu se středem v bodě $x_o = 0$ pro funkci $\tan x$ vypočítejte $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - x}{x^3}$.

6) Zjistěte, kdy je funkce $f(x) = 7x - \dfrac{1}{2 - x}$ konkávní, kdy konvexní a má-li inflexní body.

Všechna svá tvrzení zdůvodněte.

Výsledky

1) Bázi tvoří např. polynomy $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_5(x)$.

2b), **2c)** Množina M je podprostor $\mathbf{R}^3$, protože je uzavřená na sčítání i násobení číslem.
2a), **2d)** množina M není podprostor - např. nemá nulový prvek.

3) $\det\mathbf{A} = 80$ a $\det\mathbf{A}^{-1} = 1/80$.

4) Funkce má lokální minimum v bodě $x = -4$.

5) Pro výpočet limity stačí Taylorův polynom 3. stupně $T_3(x) = x + \dfrac{x^3}{3}$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - x}{x^3} = \dfrac{1}{3}$.

6) Funkce je konkávní na $(-\infty, 2)$, konvexní na $(2, \infty)$, nemá inflexní bod.

1) Je dán lineární prostor $P_{\leq 2}$ všech polynomů stupně nejvýš 2 a polynomy: $p_1(x) = 2x^2+3x$, $p_2(x) = x^2-x+2$, $p_3(x) = 4x^2+x+4$, $p_4(x) = x^2-6x+6$, $p_5(x) = 3x^2+2x+1)$. Ze zadaných polynomů vyberte alespoň jednu skupinu, která tvoří bázi prostoru $P_{\leq 2}$.

2) Je dán lineární prostor $\mathbf{R}^3$ s operací sčítání vektorů a násobení vektoru reálným číslem po složkách. Zjistěte, zda následující podmnožiny $M \subseteq \mathbf{R}^3$ jsou podprostory lineárního prostoru $\mathbf{R}^3$. Své tvrzení zdůvodněte.

   a) $M = \{(a, a, c);\ a > c,\ c$ libovolné$\}$
   b) $M = \{(a, 0, 2a);\ a$ libovolné$\}$
   c) $M = \{(a, b, c);\ a + b + c = 0,\ a,\ b$ libovolné$\}$
   d) $M = \{(a, c - 2, c);\ a,\ c$ libovolné$\}$

3) Je dána matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

   Určete $\det \mathbf{A}$ a $\det \mathbf{A}^{-1}$.

4) Určete lokální extrémy funkce $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + 6x^2}$.

5) Pomocí Taylorova polynomu se středem v bodě $x_o = 0$ pro funkci $\tan x$ vypočítejte $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - x}{x^3}$.

6) Zjistěte, kdy je funkce $f(x) = 7x - \dfrac{1}{2 - x}$ konkávní, kdy konvexní a má-li inflexní body.

Všechna svá tvrzení zdůvodněte.