1) Vyřešte danou soustavu, proveďte diskuzi řešení vzhledem k parametru p.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & - & u & = & 0 \\ 2x & - & 3y & + & 5z & & & = & 2 \\ x & + & y & + & pz & + & 5u & = & 9 \\ 3x & + & & & (2p+3)z & + & 9u & = & 18 \end{array}$$

2) Je dán lineární prostor $\mathbf{R}^3$ s operací sčítání $(a,b,c)+(d,e,f)=(a+d,b+e,c+f)$ a násobení reálným číslem $\alpha\cdot(a,b,c)=(\alpha\,a,\alpha\,b,\alpha\,c)$. Zjistěte, zda následující podmnožiny $M\subseteq\mathbf{R}^3$ jsou podprostory lineárního prostoru $\mathbf{R}^3$. Své tvrzení zdůvodněte.

a) $M=\{(a,a,c);\ a\le c\}$
b) $M=\{(a,b,0);\ a,\ b \text{ libovolné}\}$
c) $M=\{(a,b,c);\ b=c+1,\ a \text{ libovolné}\}$
d) $M=\{(a,b,c);\ c=b+3a,\ a,\ b \text{ libovolné}\}$

3) Vyřešte maticovou rovnici pro neznámou matici $\mathbf{X}$: $3\,\mathbf{AX}+\mathbf{B}=2\,\mathbf{X}$, kde

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

4) Nalezněte maximální intervaly, ve kterých je funkce $f(x)$ rostoucí, klesající a určete, zda má lokální extrémy. $f(x)=\dfrac{1}{x(x+2)}$ Své tvrzení zdůvodněte.

5) Zjistěte, zda následující řady konvergují, nebo divergují. Své tvrzení zdůvodněte.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(2n-1)!}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n+5}{2n^2-1}$.

6) Zjistěte, kdy je funkce $f(x)=\sqrt{x^3}+7x+6\sqrt{x}$ konkávní, kdy konvexní a má-li inflexní body.

Výsledky

1) Pro $p=0$ soustava nemá řešení, pro $p\neq 0$ má soustava jednoparametrické řešení
$\mathbf{x}=\left(4-\dfrac{3}{p},2+\dfrac{3}{p},\dfrac{3}{p},0\right)+u\,(-3,-2,0,1)$, kde $u\in\mathbf{R}$.

2b) 2d) Množina M je podprostor $\mathbf{R}^3$, protože je uzavřená na sčítání i násobení číslem.
2a) Množina M není podprostor, není uzavřená na násobení záporným číslem, **2c)** množina M není podprostor - např. nemá nulový prvek.

3) $\mathbf{X}=\dfrac{1}{25}\begin{bmatrix} 20 & 47 \\ -20 & -12 \end{bmatrix}$

4) Funkce je rostoucí na $(-\infty,\ -2)$ a $(-2,\ -1\rangle$, klesající na $\langle -1,\ 0)$, a $(0,\ \infty)$ v bodě $x=-1$ má lokální maximum.

5a) Řada konverguje (limitní podílové kritérium), **5b)** Řada konverguje (Leibnizovo kritérium).

6) Funkce je konkávní na $(0,2)$, konvexní na $(2,\infty)$ a v bodě $x=2$ má inflexní bod.

1) Vyřešte danou soustavu, proveďte diskuzi řešení vzhledem k parametru p.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & - & u & = & 0 \\ 2x & - & 3y & + & 5z & & & = & 2 \\ x & + & y & + & pz & + & 5u & = & 9 \\ 3x & + & & & (2p+3)z & + & 9u & = & 18 \end{array}$$

2) Je dán lineární prostor $\mathbf{R}^3$ s operací sčítání $(a,b,c)+(d,e,f)=(a+d,b+e,c+f)$ a násobení reálným číslem $\alpha\cdot(a,b,c)=(\alpha\, a,\alpha\, b,\alpha\, c)$. Zjistěte, zda následující podmnožiny $M\subseteq\mathbf{R}^3$ jsou podprostory lineárního prostoru $\mathbf{R}^3$. Své tvrzení zdůvodněte.

a) $M=\{(a,a,c);\ a\le c\}$
b) $M=\{(a,b,0);\ a,\ b \text{ libovolné}\}$
c) $M=\{(a,b,c);\ b=c+1,\ a \text{ libovolné}\}$
d) $M=\{(a,b,c);\ c=b+3a,\ a,\ b \text{ libovolné}\}$

3) Vyřešte maticovou rovnici pro neznámou matici $\mathbf{X}$: $3\,\mathbf{AX}+\mathbf{B}=2\,\mathbf{X}$, kde

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

4) Nalezněte maximální intervaly, ve kterých je funkce $f(x)$ rostoucí, klesající a určete, zda má lokální extrémy. $f(x)=\dfrac{1}{x(x+2)}$ Své tvrzení zdůvodněte.

5) Zjistěte, zda následující řady konvergují, nebo divergují. Své tvrzení zdůvodněte.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(2n-1)!}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n+5}{2n^2-1}$.

6) Zjistěte, kdy je funkce $f(x)=\sqrt{x^3}+7x+6\sqrt{x}$ konkávní, kdy konvexní a má-li inflexní body.