1) Je dán lineární prostor $\mathbf{R}^3$ s operací sčítání $(a,b,c)+(d,e,f)=(a+d,b+e,c+f)$ a násobení reálným číslem $\alpha\cdot(a,b,c)=(\alpha\,a,\alpha\,b,\alpha\,c)$. Zjistěte, zda následující podmnožiny $M\subseteq\mathbf{R}^3$ jsou podprostory lineárního prostoru $\mathbf{R}^3$. Pokud M je podprostor, nalezněte jeho bázi.

a) $M=\{(a,b,c);\ a=b,\ c=a-1,\ a \text{ libovolné}\}$,
b) $M=\{(a,b,c);\ a=2b,\ b=2c,\ c \text{ libovolné}\}$,
c) $M=\{(a,b,c);\ a+b+c-3=0,\ a,\ b \text{ libovolné}\}$.

2) Určete obecné řešení soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & - & 4u & = & 1 \\ x & + & 3y & - & z & + & 2u & = & 1 \\ x & - & 4y & + & 4z & - & 6u & = & 0 \end{array}$$

3) Vyřešte maticovou rovnici $\mathbf{BC}-2\mathbf{XB}=\mathbf{XA}+\mathbf{AC}$ pro neznámou matici $\mathbf{X}$.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

4) Určete definiční obor dané funkce a zjistěte maximální intervaly, kde funkce klesá a kde roste. Má funkce lokální extrémy? $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4x+3}$

5) Nalezněte rovnice všech tečen ke grafu funkce $f(x)=\operatorname{cotg}2x,\ x\in(-\pi/2,\pi/2)\setminus\{0\}$, rovnoběžných s přímkou $y=-2x+11$. Určete body dotyku.

6) Určete lokální extrémy funkce $f(x)=\ln(x^2+2x)$.

Veškerá svá tvrzení zdůvodněte.

Výsledky

1a) M není podprostor, neobsahuje nulový prvek.

1b) M je podprostor, je uzavřená na sčítání i násobení, báze je např. vektor (4,2,1).

1c) M není podprostor, neobsahuje nulový prvek.

2) Obecné řešení je $\mathbf{x}=(4/7,1/7,0,0)+t\,(-8,5,7,0)+s\,(10,-8,0,7),\ t,\ s\in\mathbf{R}$.

3) $\mathbf{X}=(\mathbf{B}-\mathbf{A})\,\mathbf{C}\,(\mathbf{A}+2\mathbf{B})^{-1}=\begin{bmatrix} -9 & 7 \\ -3/2 & -7/2 \end{bmatrix}$

4) $D_f=\mathbf{R}\setminus\{1,\ 3\}$, funkce je rostoucí na intervalech $(-\infty,1),\ (1,2)$, klesající na intervalech $(2,3),\ (3,\infty)$. V bodě $x=2$ má lokální maximum.

5) $t_1:\quad y=-2\,(x-\pi/4),\quad T_1=[\pi/4,0],\qquad t_2:\quad y=-2\,(x+\pi/4),\quad T_2=[-\pi/4,0]$.

6) $D_f=(-\infty,-2)\cup(0,\infty)$, stacionární body nejsou, funkce nemá lokální extrémy.