1) Rozhodněte, který ze zadaných vektorů je vlastním vektorem dané matice. Zjistěte odpovídající vlastní číslo.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

2) Ověřte, že matice $\mathbf{A}$ je regulární, určete inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$ a použijte vypočítanou inverzní matici k vyřešení soustavy $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3) Zjistěte, zda vektor $\mathbf{x} = (2, 1, -1)$ je z lineárního obalu vektorů $(3, 1, -4)$, $(5, 5, -6)$, $(3, -4, -5)$, $(1, 2, -1)$.

4) Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+3x})$. Má daná funkce šikmou nebo vodorovnou asymptotu?

5) Zjistěte, zda řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n - n^3}{3^n}$ konverguje.

6) Určete globální (absolutní) extrémy funkce $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2+1}$ na intervalu $\langle -3, 1\rangle$.

Veškerá svá tvrzení zdůvodněte.

Výsledky

1) Vlastní vektor je $\mathbf{v_3}$, odpovídající vlastní číslo je $\lambda_3 = -3$.

2) Matice $\mathbf{A}^{-1} = -\dfrac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b} = (1, 3, -2)^T$.

3) Hodnost matice sestavené z vektorů $(3, 1, -4)$, $(5, 5, -6)$, $(3, -4, -5)$, $(1, 2, -1)$ je 2. Přidáme-li vektor $\mathbf{x}$, je hodnost 3. $\Rightarrow$ vektor $\mathbf{x}$ není z LOBu zadaných vektorů.

4) Limita je $-\dfrac{3}{2}$, funkce má vodorovnou asymptotu $y = -\dfrac{3}{2}$.

5) Je splněno podílové kriterium $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1) - (n+1)^3}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{2n - n^3} = \frac{1}{3}$, řada tedy konverguje.

6) Podezřelé body jsou krajní body intervalu -3, 1 a stacionární bod -2. Z tabulky podezřelých bodů a příslušných funkčních hodnot

x	-3	-2	1
$f(x)$	$1/2$	1	$1/10$

dostáváme gmax $= [-2, 1)$, gmin $= [1, 1/10]$.