1) Soustava $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ má partikulární řešení $\mathbf{x}_p = (-2, 1, 0)^T$. Nalezněte obecné řešení soustavy a vektor pravých stran $\mathbf{b}$. Matice soustavy je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

2) Vyřešte maticovou rovnici $\mathbf{AX} - \mathbf{BA} = 2\mathbf{B} + \mathbf{X}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

3) Zjistěte, zda některá z následujících skupin polynomů tvoří bázi v lineárním prostoru všech polynomů stupně nejvýš 2.

a) $p_1(x) = x^2 - 3x + 1,\ p_2(x) = 2x^2 + 5x - 3,\ p_3(x) = -x^2 - 19x + 9,$

b) $p_1(x) = x^2 + 7x + 1,\ p_2(x) = x^2 + 5x - 3,\ p_3(x) = -x^2 - 6x + 3,$

c) $p_1(x) = x^2 - 3x + 8,\ p_2(x) = 2x^2 + 5x - 1,\ p_3(x) = -x^2 - 8x + 9,$

4) Zjistěte, zda posloupnost $\left\{\dfrac{2n-1}{2n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí, klesající, omezená, určete její limitu.

5) Určete všechny stacionární body funkce $f(x) = \sqrt{x^3 - 2x^2}$, má funkce lokální extrémy?

6) Zjistěte, pro která x je funkce $f(x) = \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{3x}}$ konvexní.

Veškerá svá tvrzení zdůvodněte.

Výsledky

1) Obecné řešení přidružené homogenní soustavy $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ je $\mathbf{x}_h = t\,(-1, 3, 2)^T$ a obecné řešení původní soustavy je $\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p = t\,(-1, 3, 2)^T + (-2, 1, 0)^T,\ t \in \mathbf{R}$. Vektor pravých stran $\mathbf{b} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_p = (-3, -4, -1)^T$.

2) $\mathbf{X} = (\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1}\,\mathbf{B}\,(2\mathbf{E} + \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} -20 & 25 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}.$

3) Bázi tvoří pouze skupina b), neboť polynomy jsou LNZ.

4) Posloupnost je rostoucí, zdola omezená prvním členem $a_1 = 1/4$ a shora omezená limitou rovnou 1.

5) Funkce nemá žádné stacionární body, ani lokální extrémy, je neklesající na celém definičním oboru $\{0\} \cup \langle 2, \infty)$.

6) Funkce je konvexní na intervalech $\left(-\infty, \dfrac{2-\sqrt{2}}{3}\right), \left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{3}, \infty\right)$.