1) Je dán lineární prostor $\mathbf{P}_{\le 2}$ všech polynomů stupně nejvýš 2. Ověřte, že následující polynomy $p_1(x) = x^2 - x - 1,\ p_2(x) = 2x + 3,\ p_3(x) = x^2 + 3x + 4$ tvoří bázi v $\mathbf{P}_{\le 2}$ a vyjádřete polynom $q(x) = x^2 + 9x + 11$ jako lineární kombinaci prvků báze.

2) Určete, pro které hodnoty t má matice $\mathbf{A}$ hodnost 3. Tvoří v tomto případě řádky matice bázi lineárního prostoru $\mathbf{R}^4$?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -t & 1 \\ 2 & 1 & 2 & t \end{bmatrix}$$

3) Vypočítejte determinant

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

4) Nalezněte intervaly monotónie funkce $f(x) = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2} - \frac{6}{\sqrt[3]{x}}$, načrtněte graf nějaké funkce, která má stejné intervaly monotónie, jako jsou ty vypočítané.

5) Určete všechny asymptoty grafu funkce $f(x) = \frac{2x^2 + 3}{(x-1)^2}$, načrtněte části grafu v blízkosti asymptot. Jaká musí být obecná funkce $g(x)$ co do zakřivení (konkávní, konvexní) v blízkosti asymptoty

$x = x_o$, je-li $\lim\limits_{x \to x_o^\pm} g(x) = \mp\infty$?

6) Zjistěte, zda řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2n}{n!}$ konverguje, určete třetí částečný součet řady s_3.

Veškerá svá tvrzení zdůvodněte.

Výsledky

1) $q = -2\,p_1 - p_2 + 3\,p_3$.

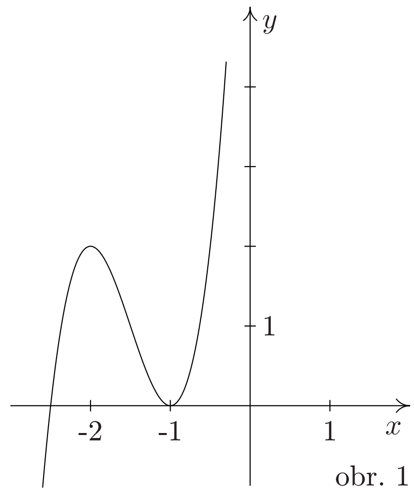
2) Hodnoty t se zjistí z podmínky, že po Gaussově eliminaci dané matice musí být jeden řádek nulový. $t_1 = -3,\ t_2 = 1$. Řádky matice pak nemohou tvořit bázi v $\mathbf{R}^4$, protože jsou LZ.

3) $\det \mathbf{A} = 27$.

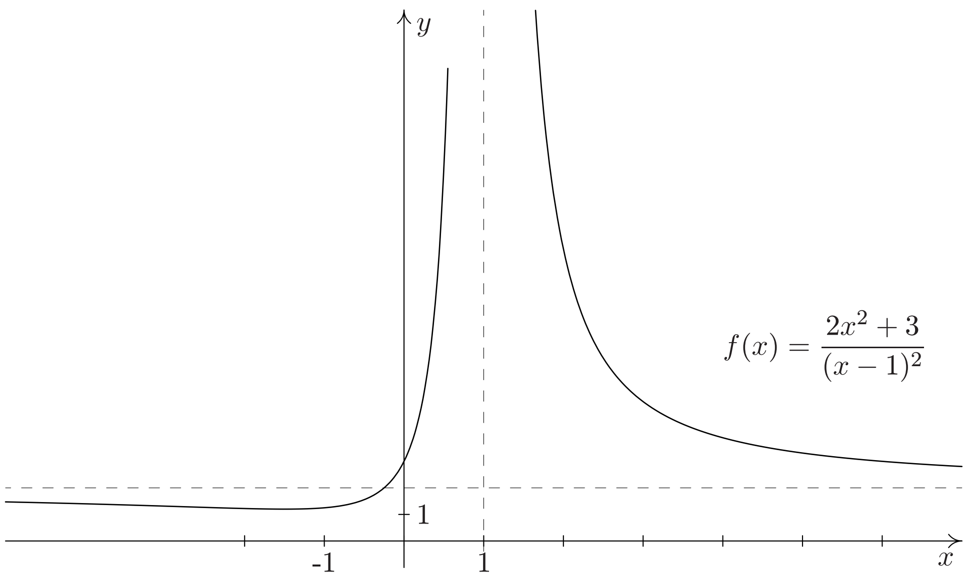
4) Funkce je na intervalech $(-\infty, -2),\ (-1, \infty)$ rostoucí a na $(-2, -1)$ klesající. Graf funkce je na obrázku 1.

5) Svislá asymptota $x = 1$, vodorovná asymptota $y - 2$. Funkce $g(x)$ musí být u asymptoty zleva konvexní, zprava konkávní. Graf $f(x)$ je na obrázku 2.

6) Řada konverguje, protože je splněno podílové kriterium. $s_3 = \frac{3}{1} + \frac{8}{2} + \frac{15}{6} = 9.5$.



obr. 1



obr. 2