

- 1) Zjistěte, zda vektor $\mathbf{x} = (0, 1, -1)$ je z lineárního obalu vektorů $(3, 1, -4)$, $(5, 5, -6)$, $(3, -4, -5)$, $(1, 2, -1)$.
- 2) Vyřešte maticovou rovnici $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ s neznámou maticí \mathbf{X} , kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

3) Je dán lineární prostor \mathbf{R}^3 s operací sčítání $(a, b, c) + (d, e, f) = (a+d, b+e, c+f)$ a násobení reálným číslem $\alpha \cdot (a, b, c) = (\alpha a, \alpha b, \alpha c)$. Zjistěte, zda následující podmnožiny $M \subseteq \mathbf{R}^3$ jsou podprostory lineárního prostoru \mathbf{R}^3 .

- a) $M = \{(a, b, c); a \geq b, c \text{ libovolné}\}$,
 b) $M = \{(a, b, 1); a, b \text{ libovolné}\}$,
 c) $M = \{(a, b, c); b = c, a, b \text{ libovolné}\}$,
 d) $M = \{(a, b, c); c = 2b - 3a, a, b \text{ libovolné}\}$,
 e) $M = \{(a, b, c); b = a + 2, c = a - 3, a \text{ libovolné}\}$.

4) Určete tečnu ke grafu funkce $f(x) = \sqrt[5]{28 + x^2}$ v bodě $T = [2, ?]$. Je funkce f v bodě $x = 2$ rostoucí, nebo klesající?

5) Nalezněte inverzní funkci k funkci $f(x) = e^x + 2$. Do jedné soustavy souřadnic nakreslete grafy obou funkcí, určete průsečíky grafů se souřadnicovými osami.

6) Vypočítejte limity:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^2 \sin x}$, b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)^2(1+n-3n^2)^2(5n^4-n^2-2)}{(3n^3+n^2-7)^2(n^2+8n-1)^2}$

Veškerá svá tvrzení zdůvodněte.

Výsledky

1) Zadaný vektor není z daného lineárního obalu, protože jeho dimenze je 2, zatímco dimenze lineárního obalu všech daných vektorů je 3. Zjistí se Gaussovou eliminací.

2) $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -15 & 5 & -9 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$

3a) Množina M není podprostor \mathbf{R}^3 , protože není uzavřena na násobení.

3b) $M \not\subseteq \mathbf{R}^3$, neobsahuje nulový vektor.

3c) $M \subseteq \mathbf{R}^3$, je uzavřená na sčítání i násobení.

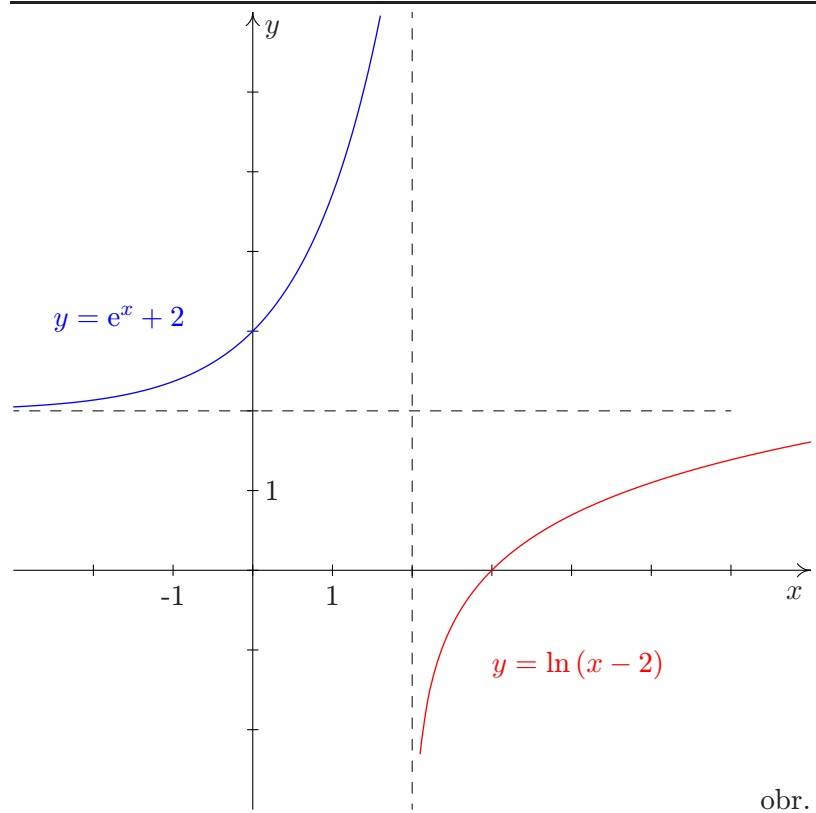
3b) $M \subseteq \mathbf{R}^3$, je uzavřená na sčítání i násobení.

3b) $M \not\subseteq \mathbf{R}^3$, neobsahuje nulový vektor.

4) Rovnice tečny v bodě $T[2, 2]$: $y - 2 = \frac{1}{20}(x - 2)$. Funkce je v bodě $x = 2$ rostoucí, neboť $f'(2) > 0$.

5) Inverzní funkce je $y = \ln(x - 2)$, graf je na obrázku.

6a) Limita je $1/2$. 6b) Limita je 20 .



obr.