1) Nalezněte bázi lineárního prostoru všech řešení dané soustavy:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x & + & 2y & + & 4z & + & u & = & 0 \\ x & - & y & + & 3z & - & u & = & 0 \\ 7x & + & 8y & + & 6z & + & 5u & = & 0 \\ 3x & + & 7y & - & z & + & 5u & = & 0 \end{array}$$

2) Vyřešte maticovou rovnici $\mathbf{AX} - 3\mathbf{B} = 2\mathbf{X}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3) Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory matice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$, a matice $\mathbf{B} = \mathbf{A}^3 - 2\mathbf{A}$.

4) Určete tečnu ke grafu funkce $f(x) = \dfrac{1}{2\cos x}$ v bodě $T = [\pi/3, ?]$. Jaký úhel svírá tečna s kladným směrem osy x?

5) Zjistěte průběh funkce $f(x) = \ln(x^2 - 1)$, načrtněte graf.

6) Určete globální extrémy funkce $f(x) = \sqrt[3]{(2x-3)^2}$ na intervalu $\langle 0, 2\rangle$.

Veškerá svá tvrzení zdůvodněte.

Výsledky

1) Obecné řešení je $\mathbf{x} = z\,(-2,1,1,0) + u\,(1/5, -4/5, 0, 1)$, takže bázi mohou tvořit např. vektory: $(-2,1,1,0), (1,-4,0,5)$

2) Rovnici řeší matice $\mathbf{X} = (\mathbf{A} - 2\,\mathbf{E})^{-1} 3\,\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -9/2 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$.

3) Vlastní čísla a vlastní vektory matice $\mathbf{A}$ jsou $\lambda_1 = 5,\ \mathbf{x}_1 = k\,(2,1)$,
$\lambda_2 = 6,\ \mathbf{x}_2 = k\,(1,1),\ k \in \mathbf{R}$. Vlastní vektory matice $\mathbf{B}$ jsou stejné jako pro matici $\mathbf{A}$, vlastní čísla matice $\mathbf{B}$ jsou $\tilde{\lambda}_1 = 5^3 - 2\cdot 5 = 115,\ \tilde{\lambda}_2 = 6^3 - 2\cdot 6 = 204$.

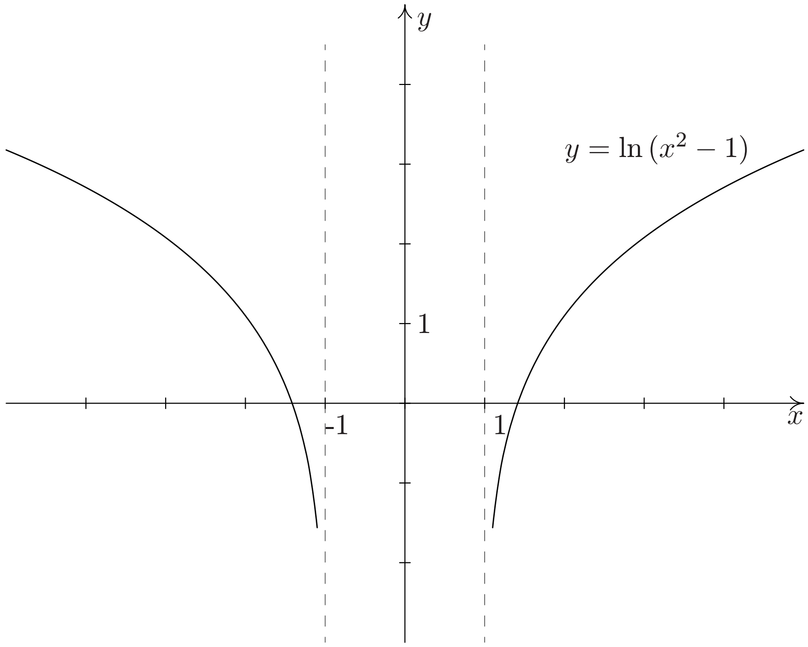
4) Bod dotyku $T = \left[\dfrac{\pi}{3}, 1\right]$, rovnice tečny: $y - 1 = \sqrt{3}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$. Tečna svírá s osou x úhel $\dfrac{\pi}{3}$.

5) $D_f = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, funkce je sudá, graf je symetrický podle osy y.
Svislé asymptoty $x = -1,\ x = 1$,
$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1} \Rightarrow$ stacionární body nejsou, pro $x < -1$ je funkce klesající, pro $x > 1$ je rostoucí.
$f''(x) = \dfrac{-2x^2 - 2}{(x^2-1)^2} \Rightarrow$ funkce je na celém definičním oboru konkávní. Graf je na obrázku.

6) $f'(x) = \dfrac{4}{3}\,\dfrac{1}{\sqrt[3]{2x-3}} \Rightarrow$ stacionární body nejsou. Tabulka podezřelých bodů a příslušných funkčních hodnot tedy je

x	0	$3/2$	2
$f(x)$	$\sqrt[3]{9}$	0	1

$\Rightarrow$ gmax $= [0, \sqrt[3]{9}]$, gmin $= [3/2, 0]$.


y
1
-1
1
x
$y = \ln(x^2 - 1)$