1) Jsou dány LNZ vektory $\mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w}$. Rozhodněte o L(N)Z vektorů
a) $\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ \mathbf{z}$, kde $\mathbf{x} = 2\mathbf{u} - 3\mathbf{v} + \mathbf{w},\ \mathbf{y} = \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w},\ \mathbf{z} = \mathbf{u} - 2\mathbf{v} + \mathbf{w}$,
b) $\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c},\ \mathbf{d}$, kde $\mathbf{a} = \mathbf{u} + \mathbf{v},\ \mathbf{b} = \mathbf{u} - \mathbf{w},\ \mathbf{c} = \mathbf{v} + 2\mathbf{w},\ \mathbf{d} = \mathbf{u} + 3\mathbf{v} - 2\mathbf{w}$.

2) Vyřešte maticovou rovnici $3\mathbf{A}\mathbf{X} = 2\mathbf{B} + \mathbf{X}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

3) Vypočítejte inverzní matici k matici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

4) Určete všechny asymptoty funkce $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2+4x}$, načrtněte části grafu v blízkosti asymptot.

5) Zjistěte, kdy je funkce $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$ konkávní a kdy konvexní.

6) Určete lokální extrémy funkce $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x+1}$.

Veškerá svá tvrzení zdůvodněte.

Výsledky

1a) Vektory jsou LNZ, protože pouze jejich triviální lineární kombinace je rovna nulovému vektoru.
1b) Vektory jsou LZ, protože existuje jejich netriviální lineární komkinace, která je rovna nulovému vektoru.(Např. $-7\mathbf{a} + 6\mathbf{b} + 4\mathbf{c} + \mathbf{d}$).

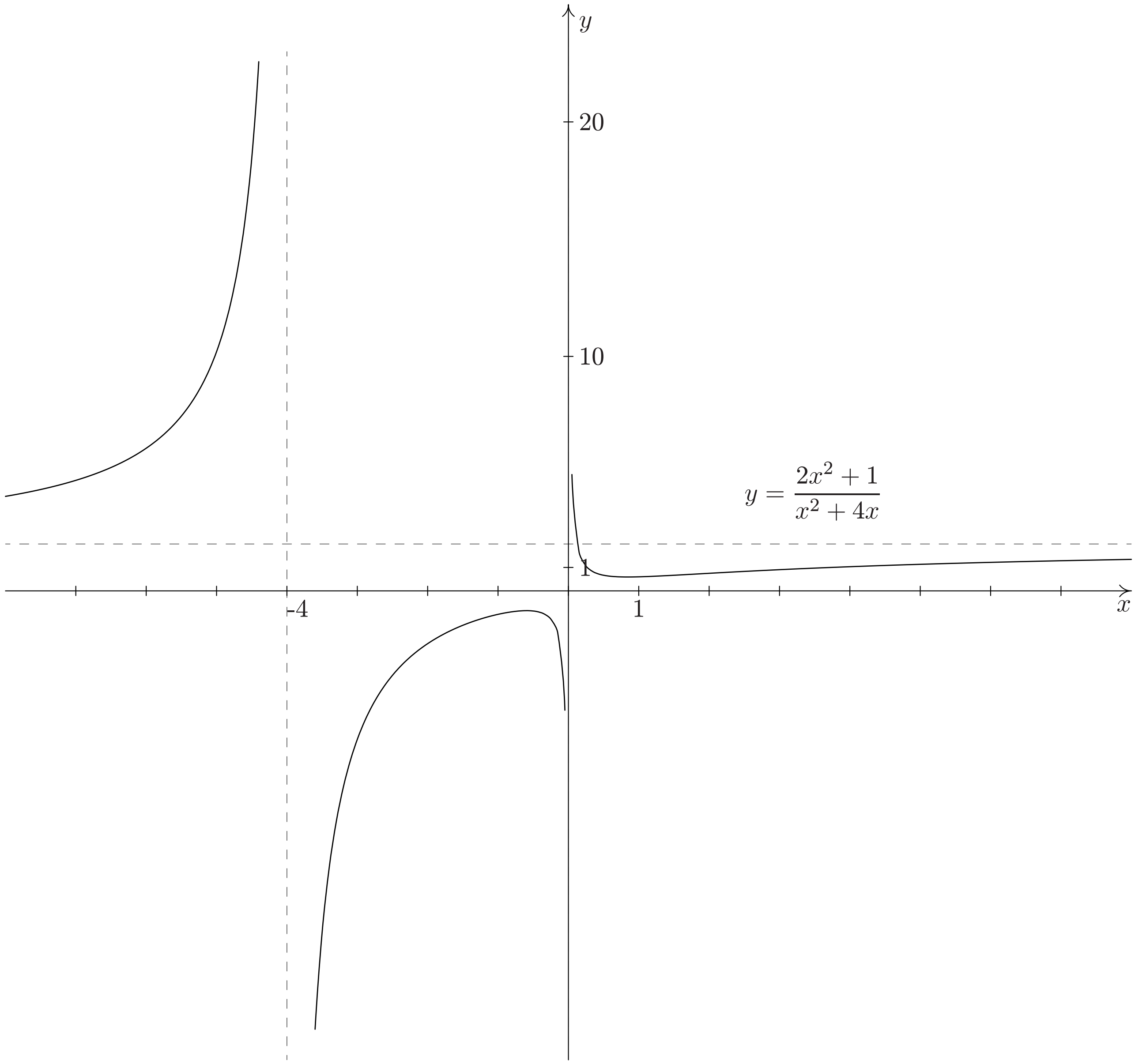
2) $\mathbf{X} = 2\,(3\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1}\mathbf{B} = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$.

3) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

4) Svislé asymptoty: $x = -4, x = 0$, vodorovná asymptota $y = 2$, chování grafu v blízkosti asymptot viz obrázek.

5) Druhá derivace $f''(x) = \dfrac{-2x\,(x+2)}{(x^2+2x+2)^2} \Rightarrow$ funkce je konvexní na $(-2, 0)$, konkávní na $(-\infty, -2),\ (0, \infty)$.

6) Funkce má lokální maximum v $x = -1 - \sqrt{2}$, lokální minimum v $x = -1 + \sqrt{2}$.


y
20
10
$y = \frac{2x^2+1}{x^2+4x}$
1
-4
1
x