Ukázka zápočtového testu č. 2

1) a) Rozhodněte, která z následujících skupin vektorů tvoří bázi v $\mathbf{R}^3$.

1. $\{(1,3,2),\ (4,5,-2)\}$,
2. $\{(4,-1,2),\ (1,3,3),\ (4,5,5)\}$,
3. $\{(2,3,-1),\ (4,7,1),\ (1,2,1)\}$,
4. $\{(1,3,2),\ (4,-1,2),\ (2,3,-1),\ (4,-1,2)\}$.

b) Vektor $(1,1,-1)$ vyjádřete jako lineární kombinaci vektorů $(1,1,0),\ (0,1,2),\ (2,0,3)$.

c) Určete alespoň jednu bázi lineárního prostoru $M = \langle (2,1,5),\ (3,0,4),\ (-6,3,-1),\ (-1,4,8)\rangle$.

2) a) Jsou dány matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}^{-1}$. Určete matici $\mathbf{C}^{-1}$, je-li $\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

b) Vyřešte maticovou rovnici $\mathbf{XA} = 2\mathbf{B} + 2\,\mathbf{X}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) Je dána matice $\mathbf{A}$. Vypočítejte prvek $a^{-1}_{2\,4}$ inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$.

3) Vypočítejte determinant matice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$.

a) Jakýmkoli způsobem.

b) Převedením na výpočet determinantu trojúhelníkové matice.

c) Rozvojem podle 3. sloupce.

Výsledky

1a) 1. a 4. skupina ne, protože vektory musí být právě 3, 3. skupina je LZ, čili se taky nehodí, zbývá 2. skupina vektorů, která tvoří bázi, neb jich je tak akorát a jsou LNZ.

1b) $(1,1,-1) = \frac{9}{7}(1,1,0) - \frac{2}{7}(0,1,2) - \frac{1}{7}(2,0,3)$.

1c) Bázi tvoří libovolná dvojice vektorů, z nichž je lineární obal vytvořen (např. $(2,1,5),\ (3,0,4)$), protože pouze dva vektory (kterékoli) z uvedených čtyř jsou lineárně nezávislé (zjistí se Gaussovou eliminací).

2a) $\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -20 & 13 & 17 \\ -22 & 5 & 13 \\ 4 & 10 & 2 \end{bmatrix}$. **2b)** $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$.

2c) Stačí spočítat determinant matice $\mathbf{A}$ a algebraický doplněk prvku $a_{4\,2}$. Vychází $a^{-1}_{2\,4} = \frac{12}{55}$.

3) $\det(\mathbf{A}) = 59$.