Zkouška 012_ITP 27.5.2013

1. Vypočítejte integrál $\int\left(6(\cos 3x)^{-2}+\dfrac{2}{3x-1}\right)\mathrm{d}\,x$ a určete intervaly, na kterých integrál existuje.

Intervaly: $x\neq\frac{1}{3},\quad x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k$ celé $\Rightarrow\ldots,\left(-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right),\left(-\frac{\pi}{2},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{3},\frac{\pi}{2}\right),\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right),\ldots$

$$\int\left(6(\cos 3x)^{-2}+\frac{2}{3x-1}\right)\mathrm{d}\,x=2\,\mathrm{tg}\,3x+\frac{2}{3}\ln|3x-1|+C$$

2. Určete intervaly, na kterých existuje integrál $\int\dfrac{\ln\left(x^2\right)}{x}\mathrm{d}\,x$ a užitím substituční metody jej vypočítejte.

Intervaly: funkce $\ln\left(x^2\right)$ definována pro $x\neq 0\Rightarrow(-\infty,0),(0,\infty)$

$$\int\frac{\ln\left(x^2\right)}{x}\mathrm{d}\,x=\left|\begin{array}{l}\ln\left(x^2\right)=t\\ \frac{1}{x^2}\cdot 2x\,\mathrm{d}\,x=\mathrm{d}\,t\end{array}\right|=\int\frac{t}{2}\mathrm{d}\,t=\frac{t^2}{4}+C=\frac{\left(\ln\left(x^2\right)\right)^2}{4}+C$$

3. Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací křivky $x\sqrt{\ln x}$ kolem osy x v mezích od 0 do e.

$$\pi\int_0^{\mathrm{e}}\left(x\ \sqrt{\ln x}\right)^2\mathrm{d}\,x=\pi\int_0^{\mathrm{e}}x^2\ln x\,\mathrm{d}\,x=\pi\left(\tfrac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}\right)_0^{\mathrm{e}}=\pi\left(\tfrac{\mathrm{e}^3}{3}\ln\mathrm{e}-\frac{\mathrm{e}^3}{9}\right)=2\pi\frac{\mathrm{e}^3}{9}$$

$$\int x^2\ln x\,\mathrm{d}\,x=\left|\begin{array}{ll}u'=x^2 & u=\frac{x^3}{3}\\ v=\ln x & v'=\frac{1}{x}\end{array}\right|=\tfrac{x^3}{3}\ln x-\int\tfrac{x^2}{3}\mathrm{d}\,x=\tfrac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}$$

4. Vypočtěte nevlastní integrál $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{4}{x(x+2)}\mathrm{d}\,x$

$$\int_1^{\infty}\frac{4}{x(x+2)}\mathrm{d}\,x=\int_1^{\infty}\left(\frac{2}{x}-\frac{2}{x+2}\right)\mathrm{d}\,x=2\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|_1^{\infty}=2\ln 3$$

5. Metodou variace konstanty určete řešení diferenciální rovnice $y'+\dfrac{1}{x}y=x$ splňující počáteční podmínku $y(1)=\frac{-2}{3}$. Určete také interval maximálního řešení.

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=-\frac{1}{x}y\Rightarrow\int\frac{1}{y}\mathrm{d}\,y=-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}\,x\Rightarrow\ln|y|=\ln\frac{k}{|x|}\Rightarrow y_{oh}=\frac{k}{x}$$

Variace konstanty: $v(x)=\dfrac{k(x)}{x},\quad v'(x)=\dfrac{k'(x)}{x}-\dfrac{k(x)}{x^2}$

Řešení rovnice s pravou stranou:

$$\frac{k'(x)}{x}-\frac{k(x)}{x^2}+\frac{1}{x}\cdot\frac{k(x)}{x}=x\quad\Rightarrow\quad k'(x)=x^2\quad\Rightarrow\quad k(x)=\frac{x^3}{3}\quad\Rightarrow\quad v(x)=\frac{x^2}{3}$$

Obecné řešení $\mathrm{y}_{on}=y_{oh}+v(x)=\dfrac{k}{x}+\dfrac{x^2}{3}$

Řešení rovnice splňující poč. podmínku $y(1)=\frac{-2}{3}$

$$\tfrac{-2}{3}=\frac{k}{1}+\frac{1}{3}\quad\Rightarrow\quad k=-1\quad\Rightarrow\quad y(x)=\frac{-1}{x}+\frac{x^2}{3},\quad x\in(0,\infty)$$

6. Graficky znázorněte množinu $S=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0\}$ a vypočtěte pomocí transformace do polárních souřadnic integrál $\iint\limits_S x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

$$\iint\limits_S x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\pi/2}\int_1^2\left(r^2\cos\varphi\sin\varphi\right)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi=\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_1^2 r^3\,\mathrm{d}r=\frac{15}{4}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin 2\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi=$$

$$=\frac{15}{16}\left(-\cos 2\varphi\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{30}{16}$$

7. Užitím Laplaceovy transformace řešte danou Cauchyovu úlohu: $y''-4y=8,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0$

$$y(t)\triangleq \qquad \triangleq \qquad \triangleq$$

$$p^2Y(p)-p-4Y(p)=\frac{8}{p}\qquad Y(p)=\frac{8+p^2}{p(p-2)(p+2)}=\frac{-2}{p}+\frac{\frac{3}{2}}{p+2}+\frac{\frac{3}{2}}{p-2}$$

$$y(t)=-2+\tfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-2t}+\tfrac{3}{2}\mathrm{e}^{2t}$$

8. *a*) Podle definice Z transformace určete obraz Y(z) posloupnosti $\{2,1,2,1,\ldots\}$.

$$\mathcal{Z}\{2,1,2,1,\ldots\}\triangleq \quad +\frac{2}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{2}{z^4}+\frac{1}{z^5}+\ldots=$$

$$=2\left(1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}+\ldots\right)+\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}+\ldots\right)=\left(2+\frac{1}{z}\right)\frac{z^2}{z^2-1}=\frac{2z^2+z}{z^2-1}$$

b) Určete posloupnost, jejímž obrazem je funkce $Y(z)=\dfrac{-1}{z+2}$.

$$Y(z)=\frac{-1}{z\left(1+\frac{2}{z}\right)}=\frac{1}{z}\frac{-1}{1-\left(-\frac{2}{z}\right)}=\frac{1}{z}F(z)$$

$$F(z)=\frac{-1}{1-\left(-\frac{2}{z}\right)}=\left|a_0=-1,\quad q=-\tfrac{2}{z}\right|=\sum_{n=0}^{\infty}-1\cdot\left(-\tfrac{2}{z}\right)^n=\frac{-1}{z^0}+\frac{2}{z^1}+\frac{-4}{z^2}+\frac{8}{z^3}+\ldots$$

$$f_n=\{-1,2,-4,8,\ldots.\}$$

$$\{y_n\}=\{f_{n-1}\}=\{0,-1,2,-4,8,\ldots.\}$$

9. I. Nechť funkce $x\ln(x^2)$ je primitivní funkcí k funkci $f(x)$ na R. Potom funkce $f(x)$ je na R rovna

a) $\ln\left(x^2\right)+\dfrac{2}{x}$ b) $\ln\left(x^2\right)+2$

c) $\dfrac{1}{x^2}$ d) $\ln\left(x^2\right)+2x$

II. Nechť $u'(x)$ a $v'(x)$ jsou integrovatelné na intervalu I. Potom na I platí

a) $\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)+\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$ b) $\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)-\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$

c) $\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = u'(x)v'(x)-\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$ d) $\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)+\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$

III. Nechť $f(x)$ je integrovatelná na $\langle a,b\rangle, a<b$ a $f(x)\geq M$ na $\langle a,b\rangle$. Potom platí

a) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq M(b-a)$ b) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a)$

c) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x < M(b-a)$ d) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > M(b-a)$

IV. Nechť F a G jsou primitivní funkce k funkci f na intervalu $\langle a,b\rangle$. Potom všude na $\langle a,b\rangle$ platí:

a) $F'(x)=-G'(x)$ b) $F'(x)-G'(x)=C\neq 0$

c) $F(x)=G(x)$ d) $F'(x)=G'(x)$

V. Množina S=$\{(x,y)\,|\,y\geq x, x\geq 0, \frac{1}{4}\leq x^2+y^2\leq 1\}$ je v polárních souřadnicích $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$, popsána takto:

a) $r\in\left\langle \frac{1}{4},1\right\rangle, \varphi\in\left\langle \frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right\rangle$ b) $r\in\left\langle \frac{1}{2},1\right\rangle, \varphi\in\left\langle \frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right\rangle$

c) $r\in\left\langle \frac{1}{4},1\right\rangle, \varphi\in\left\langle \frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{4}\right\rangle$ d) $r\in\left\langle \frac{1}{2},1\right\rangle, \varphi\in\left\langle \frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{4}\right\rangle$

10. I. Množinu S=$\{(x,y)\,|\,-1\leq x\leq 3, y\geq 0, y\leq\sqrt{3-x}\}$ lze zapsat jako normální x – obor takto (tj. v pevných mezích pro x a proměnných v y)

a) $y\in\langle 0,2\rangle, x\in\langle -1, 3-y\rangle$ b) $y\in\left\langle 0,\sqrt{3}\right\rangle, x\in\left\langle 0, 3-y^2\right\rangle$

c) $y\in\left\langle 0,\sqrt{3}\right\rangle, x\in\left\langle -1, 3-y^2\right\rangle$ d) $y\in\langle 0,2\rangle, x\in\left\langle -1, 3-y^2\right\rangle$

II. Jakobián transformace definované vztahy $x=r\sin\varphi$, $y=r\cos\varphi$ je roven

a) r^2 b) $-r$ c) r d) $-r^2$

III. Všechna řešení rovnice $y''-y=0$ jsou tvaru:

a) c_1+c_2t b) $c_1\,\mathrm{e}^{-t}+c_2\,\mathrm{e}^{t}$ c) $c_1\,\mathrm{e}^{t}+c_2$ d) $c_1\,\mathrm{e}^{-t}+c_2$

IV. Nechť obrazem funkce $f(t)$ při Laplaceově transformaci je funkce $F(p)=\dfrac{1}{p^2+1}$.

Potom Laplaceovým obrazem $\mathcal{L}\{t\cdot f(t)\}$ je funkce

a) $\dfrac{-1}{\left(p^2+1\right)^2}$ b) $\dfrac{-2p}{\left(p^2+1\right)^2}$ c) $\dfrac{2p}{\left(p^2+1\right)^2}$ d) $\dfrac{1}{\left(p^2+1\right)^2}$

V. Obrazem posloupnosti $\{-1,1,1,1,1,....\}$ při **Z** transformaci je funkce:

a) $\dfrac{2-z}{z-1}$ b) $\dfrac{1-z}{z+1}$ c) $\dfrac{2+z}{z-1}$ d) $\dfrac{z-2}{z+1}$

9. **I. b, II. b , III. a, IV. d, V. b**
10. **I. d, II. b, III. b, IV. c, V. a**